2020 年度京都大学入試理系数学解答速報

京都大学数学作問サークル有志

2020 年 2 月 25 日

$\boxed{1}$ a, b は実数で, $a>0$ とする. z に関する方程式

$$z^3+3az^2+bz+1=0 \qquad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ.

解答. 方程式の係数は実数なので，方程式の解を $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ とおける.（α は実数，β は虚部が正の非実数）このとき，点 α は実軸上にあり，β と $\bar{\beta}$ の実部は等しく，点 $\beta, \bar{\beta}$ の中点が表す複素数を γ とすると，点 γ は実軸上にある．α の実部と γ の実部は異なる．

- α の実部が γ の実部より大きい場合
  点 α と点 γ の距離は $\sqrt{3}a \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$ なので，

$$\begin{cases} \beta = \left(\alpha - \dfrac{3a}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}a}{2}i \\ \bar{\beta} = \left(\alpha - \dfrac{3a}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}a}{2}i \end{cases}$$

  となるが，解と係数の関係より

$$-3a = \alpha + \beta + \bar{\beta} = 3\alpha - 3a$$

  より $\alpha = 0$ となる．しかし，$\alpha\beta\bar{\beta} = -1 \neq 0$ より矛盾．

- α の実部が γ の実部より小さい場合
  同様に

$$\begin{cases} \beta = \left(\alpha + \dfrac{3a}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}a}{2}i \\ \bar{\beta} = \left(\alpha + \dfrac{3a}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}a}{2}i \end{cases}$$

となるので，解と係数の関係より

$$-3a = \alpha + \beta + \bar{\beta} = 3\alpha + 3a$$

である．$\alpha = -2a$ となる．また，

$$\begin{aligned}\alpha\beta\bar{\beta} &= \alpha\left\{\left(\alpha + \frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right\} \\ &= \alpha\left(\alpha^2 + 3a\alpha + 3a^2\right) = -1\end{aligned}$$

である．$\alpha = -2a$ より

$$-2a\left(4a^2 - 6a^2 + 3a^2\right) = -1$$

より $-2a^3 = -1$ であり，a は実数より $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$．よって $\alpha = -\sqrt[3]{4}$．また，解と係数の関係より

$$\begin{aligned}b &= \alpha\beta + \beta\bar{\beta} + \bar{\beta}\alpha \\ &= \alpha(\beta + \bar{\beta}) + \beta\bar{\beta} \\ &= -\sqrt[3]{4}\left(-\sqrt[3]{4} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right) \times 2 + \left\{\left(-\sqrt[3]{4} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)^2 + \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right\} \\ &= \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\end{aligned}$$

である．

以上より，$a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, b = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ であり，方程式の 3 つの解は $-\sqrt[3]{4}, -\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}(1 \pm \sqrt{3}i)$ である． □

$\boxed{2}$ p を正の整数とする．α, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で，$|\alpha| > 1$ であるとする．

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n + \beta^n$ は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n \sin\left(\alpha^n \pi\right)$ を求めよ．

解答. (1) まず，解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p,\ \alpha\beta = -1$$

である．以下，$\alpha^n + \beta^n$ が偶数であることを数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき，上の条件より成り立つ．

$n=2$ のとき，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4p^2+2$ より成り立つ．
従って，$n=k-1, k$ のときそれぞれ成立すると仮定すると，ある自然数 x，y を用いて，

$$\alpha^{k-1}+\beta^{k-1}=2x$$
$$\alpha^k+\beta^k=2y$$

と表され，このとき

$$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k)-\alpha\beta(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})=4py+2x$$

であり，任意の $n\ (=1,2,3,\ldots)$ に対して題意が示された．
(2) まず $\alpha\beta=-1$ より $|\alpha|\cdot|\beta|=1$
$|\alpha|>1$ から $|\beta|<1$，つまり $\lim_{n\to\infty}\beta^n=0$ である．
従って，

$$\begin{aligned}(-\alpha)^n\sin\alpha^n\pi &= (-\alpha)^n\sin\{(\alpha^n+\beta^n)\pi-\beta^n\pi\}\\ &= (-\alpha)^n\sin(-\beta^n\pi)\\ &= \frac{-1}{\beta^n}\sin\beta^n\pi\\ &= -\frac{\sin\beta^n\pi}{\beta^n\pi}\cdot\pi\to\boldsymbol{-\pi}\end{aligned}$$

である． □

$\boxed{3}$ k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k.$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す.

解答. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく. 点 A, B, C, D は点 O を中心とする半径 1 の球面上にあるので, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ である. 内積はベクトル同士のなす角のみによって定まるので, 一般性を失うことなく $\vec{a}=(1,0,0)$ としてよい. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{1}{2}$ より $\theta=\frac{\pi}{3}$ である. 一般性を失うことなく,

$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ としてよい．また $\vec{c}=(x,y,z)$, $\vec{d}=(s,t,u)$ とおく．与えられた条件より

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=sx+ty+uz=\frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=x=-\frac{\sqrt{6}}{4}, \tag{2}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=-\frac{\sqrt{6}}{4}, \tag{3}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=s=k, \tag{4}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{d}=\frac{1}{2}s+\frac{\sqrt{3}}{2}t=k. \tag{5}$$

さらに $|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ より

$$x^2+y^2+z^2=1, \tag{6}$$

$$s^2+t^2+u^2=1. \tag{7}$$

(2), (3) より $(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, (6) より $z^2=\frac{1}{2}$ と定まる．また (4), (5) より $\frac{1}{2}s=\frac{\sqrt{3}}{2}t$ となり, $t=\frac{s}{\sqrt{3}}$ となる．よって (7) より $u^2=1-\frac{4}{3}s^2$ となる．$0\leqq u^2\leqq 1$ より $0\leqq s^2\leqq\frac{3}{4}$ である．

さて (1) から $s\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}s+uz=\frac{1}{2}$ なので $uz=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}s$ となる．したがって

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}s\right)^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{3}s^2\right)$$

$$\therefore 16s^2+4\sqrt{6}s-3=0$$

$$s=\frac{-\sqrt{6}\pm3\sqrt{2}}{8}$$

となる．したがって $k>0$ および (4) より $k=s=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}}$. $\square$

$\boxed{4}$ 正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b,\ c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a) = b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である.
m, n は整数で, 次の条件を満たすとする.

(i) $1 \leqq m \leqq 30$.

(ii) $1 \leqq n \leqq 30$.

(iii) n は 3 で割り切れない.

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

解答. **(ア) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき**

このとき $k \in \mathbb{N}$ によって $n = 3k - 1$ と書け, $f(m, n) = m^3 + 3k(3k - 1) + 3 \equiv m^3 \pmod 3$ であるから, $m \not\equiv 0 \pmod 3$ ならば, $A(m, n) = 0$ である。$m \equiv 0 \pmod 3$ ならば, $1 \leqq l \leqq 10$ を満たす自然数 l によって $m = 3l$ と書き,

$$27l^3 + 3k(3k - 1) + 3 = 3(9l^2 + k(3k - 1) + 1) \equiv 3(0 + k(0 - 1) + 1) = 3(1 - k) \pmod 9$$

であるから, $k \not\equiv 1 \pmod 3$ ならば, $B(f(m, n)) = 1$ である。$k \equiv 1 \pmod 3$ ならば, $k = 3s - 2$ と書く ($n = 9s - 7$ と条件 (ii) より, $s = 1, 2, 3, 4$ である)。このとき,

$$\begin{aligned}3(9l^2 + k(3k - 1) + 1) &= 3\left\{9l^2 + (3s - 2)(9s - 7) + 1\right\} \\ &= 9(3l^3 + 9s^2 - 13s + 5) \equiv 9(0 + 0 - s + 2) \pmod{27}\end{aligned}$$

より, $s \neq 2$ ならば, $A(m, n) = 2$ である。$s = 2$ のとき, $9(3l^3 + 9s^2 - 13s + 5) = 27(l^3 + 5)$ である。よって, $B(l^3 + 5)$ の $1 \leqq l \leqq 10$ における最大値に 3 を足したものが $A(m, n)$ の最大値である。$l = 3, 6, 9$ のとき $l^3 + 5 \equiv 2 \pmod 9$ で, $l = 2, 5, 8$ では $l^3 + 5 \equiv 4 \pmod 9$ で, $l = 1, 4, 7, 10$ では $l^3 + 5 \equiv 6 \pmod 9$ であるから, $B(l^3 + 5)$ の最大値は $l = 1, 4, 7, 10$ のときの 1 となる。したがって, $A(m, n)$ の**最大値は $\mathbf{4}$** である。

$s = 2$ であったから, $k = 4$ である。$n = 3k - 1$ なので, $n = 11$ である。

$m=3l$ であり, $l=1,4,7,10$ であったから, $m=3,12,21,30$ である。以上より,

$$\boldsymbol{(m,n)=(3,11),(12,11),(21,11),(30,11)} \quad \cdots(*)$$

(イ) $n\equiv 1 \pmod 3$ のとき

$0\leqq k\leqq 9$ なる整数 k を用いて $n=3k+1$ と書ける。

$$f(m,n)=m^3+(3k+1)(3k+2)+3\equiv m^3+2 \pmod 3$$

$m^3-m=m(m-1)(m+1)$ は 3 の倍数なので $m^3\equiv m \pmod 3$ に注意すると, $m\not\equiv 1 \pmod 3$ のときは $A(m,n)=0$ である。$m\equiv 1 \pmod 3$ のとき, $0\leqq l\leqq 9$ なる整数 l を用いて, $m=3l+1$ と書き,

$$f(m,n)=(3l+1)^3+(3k+1)(3k+2)+3\equiv 1+2+3=6 \pmod 9$$

であるから, $A(m,n)=1$ である。これは (ア) の場合の最大値より小さい。

以上をまとめて, $(*)$ にあげた (m,n) が求める組である。 □

$\boxed{5}$ 縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の一例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

解答. 一番左の列に入れる数を上から順に A, B, C, D とする. 残りの列の B の入れ方としては, 表 1 の入れ方のほか, 左から二番目 ~ 四番目の列を任意に並べ替えた入れ方がある.

まず B を表 1 のように入れた場合について考える. 左から二番目の列のマスのうち, C が入るのは上から二番目か四番目である. 上から二番目に入るときは, 残りの埋め方はただ 1 通りに定まり, 表 2 のようになる. 上から四番目に入るときは, 残りの埋め方は 3 通りあり, 表 3, 表 4 または 表 5 のようになる. したがって, 表 1 の B の入れ方に対して, A, C, D の入れ方は 4 通りある.

左から二番目 ~ 四番目の列への他の B の入れ方に対しても, それぞれ同様の議論で 4 通りあることが分かり, 二番目 ~ 四番目の列への A, B, C, D の入れ方は全部で $4\times 3!=24$ 通り

ある. 今, A, B, C, D は $1, 2, 3, 4$ の任意の並べ替えなので, 求める場合の数は $24 \times 4! = \mathbf{576}$ **通り**である. $\square$

A	B		
B			
C		B	
D			B

表 1

A	B	D	C
B	C	A	D
C	D	B	A
D	A	C	B

表 2

A	B	D	C
B	A	C	D
C	D	B	A
D	C	A	B

表 3

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

表 4

A	B	D	C
B	D	C	A
C	A	B	D
D	C	A	B

表 5

$\boxed{6}$ x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

解答.

$$f(x, y) = \sqrt{\log\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right)}$$

として, $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たす平面上の領域上での $f(x, y)$ の挙動を考える.

ここで, $x = k$ と固定して考える. $z = f(x, y)$ かつ $x = k$ を満たしているときの $y^2 + z^2$ の取りうる値の範囲について考える. このとき

$$-\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2}$$

である. よって,

$$y^2 + z^2 = y^2 + \{f(k, y)\}^2 = y^2 + \log\left(1 + \sqrt{k^2 + y^2}\right)$$

の取りうる値の範囲を考えればいいことになる.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(y^2+z^2) &= 2y + \frac{\dfrac{y}{\sqrt{k^2+y^2}}}{1+\sqrt{k^2+y^2}} \\
&= y\left(2+\frac{1}{\sqrt{k^2+y^2}(1+\sqrt{k^2+y^2})}\right)
\end{aligned}
$$

であるが,

$$
2+\frac{1}{\sqrt{k^2+y^2}(1+\sqrt{k^2+y^2})} > 0
$$

であるため,

$$
\frac{d}{dy}(y^2+z^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0
$$

となり, $y<0$ のときは y^2+z^2 は単調減少し, $y>0$ のときは y^2+z^2 は単調増加する. よって y^2+z^2 は $y=0$ のとき最小であり,（y^2+z^2 は偶関数であるため）$y=\pm\sqrt{1-k^2}$ のときに最大となる.

また, y^2+z^2 は y について明らかに連続であるため, 中間値の定理より最小値と最大値の間の任意の値を取る.

よって

$$
0^2+\{f(k,0)\}^2 \leqq y^2+z^2 \leqq \left(\sqrt{1-k^2}\right)^2+\{f(k,\sqrt{1-k^2})\}^2
$$

であるため,

$$
\log(1+|k|) \leqq y^2+z^2 \leqq 1-k^2+\log 2
$$

となる. よって k を x に直すことで, 領域の体積 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1} 1-x^2+\log 2-\log(1+|x|)dx \\
&= 2\pi\int_{0}^{1} 1-x^2+\log 2-\log(1+x)dx \\
&= 2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}+x\log 2-(1+x)\log(1+x)+(x+1)\right]_0^1 \\
&= 2\pi\left(1-0-\frac{1}{3}+\frac{0}{3}+\log 2-0-2\log 2+0+2-1\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{5}{3}-\log 2\right) \\
&= \frac{10\pi}{3}-2\pi\log 2
\end{aligned}
$$

より体積は

$$\frac{\mathbf{10\pi}}{\mathbf{3}} - \mathbf{2\pi \log 2}$$

となる. $\square$

6 番補足

回転体は y 対称であるから, $0 \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2}$ の範囲にあるものの 2 倍を計算するのでもよい。その場合は, 微分せずとも $y^2 + z^2 = y^2 + \log(1 + \sqrt{(k^2 + y^2)})$ の $0 \leqq y \leqq \sqrt{1-k^2}$ における増加性は明らかであるから, その議論の分量を減らすことができる。