ビラ問題解答

問題 1.

(1)
$f(x)$ の $x=a$ での接線の方程式は

$$y - e^a \sin a = e^a(\sin a + \cos a)(x-a)$$

であるから,a_n は条件

$$a_n = \frac{\sin a_n}{\sin a_n + \cos a_n} = \frac{\tan a_n}{1+\tan a_n}$$

を満たす. よって,

$$\tan a_n = \frac{a_n}{1-a_n}$$

となる.$S(a)$ を $x=a$ のときの接線の $x=0$ での値とすると

$$S(a) = e^a(\sin a - a\sin a - a\cos a)$$

であって,$S'(a) = -2ae^a\cos a$ となる.

$$S((2n+1/2)\pi) = e^{(2n+1/2)\pi}(-2n+1/2) < 0$$

$$S((2n+3/2)\pi) = e^{(2n+3/2)\pi}(2n+1/2) > 0$$

よって中間値の定理から以下の 2 つが成立する.
・ $(2n+1/2)\pi < x < (2n+3/2)\pi$ において,$S'(x) > 0$ より $S(x)=0$ の解が $(2n+1/2)\pi < x < (2n+3/2)\pi$ にただ 1 つだけ存在する.
・ $(2n+3/2)\pi < x < (2n+5/2)\pi$ において,$S'(a) < 0$ より $S(x)=0$ の解が $(2n+3/2)\pi < x < (2n+5/2)\pi$ にただ 1 つだけ存在する.
また,$S(0)=0$ と $0<x<\pi/2$ で $S'(x)<0$ より $0<x<\pi/2$ 上に $S(x)=0$ の解は存在しない.
よって以下の不等式が成立する.

$$(n-\frac{1}{2})\pi < a_n < (n+\frac{1}{2})\pi (n=1,2,3,\ldots)$$

つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1-a_n} = -1$$

から

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \tan a_n = -1}$$

となる.
(2)

$$\begin{aligned} n(\tan a_n + 1) &= \frac{n}{a_n} \cdot a_n \cdot \frac{1}{1-a_n} \\ &= \frac{n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{1-a_n} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} n(\tan a_n + 1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1-a_n} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot (-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{-1}{\pi}} \end{aligned}$$

となる.

問題 2.

$f'(x)$ が周期 h を持つとすると,

$$f(x) - ax = \int_0^x (f'(t)-a)dt + f(0)$$

であり,

$$(f(x+h) - a(x+h)) - (f(x) - ax) = \int_x^{x+h} f'(t)dt - ah$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} f'(t)dt &= \int_x^h f'(t)dt + \int_h^{x+h} f'(t)dt \\ &= \int_x^h f'(t)dt + \int_0^x f'(t)dt \\ &= \int_0^h f'(t)dt \\ &= f(h) - f(0) \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$a = \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

とおくと,

$$(f(x+h) - a(x+h)) - (f(x) - ax) = 0$$

となって $f(x)$ は周期 h を持つ. □

問題 3.

α, β, γ の中に 0 があれば成立するので $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ の場合を考える. α, β, γ がすべて実数なら 3 点を通る直線は実軸となって 0 を通るため, 以降は f が複素数解を持つことを考える.

$$f(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解されているとき,

$$g(x) = k(1-x\alpha)(1-x\beta)(1-x\gamma)$$

となるため,$g(x)=0$ の解は $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$ である. 順に a, b, c とおくと, 対称性より a が実数で $b = \bar{c}$ と考えてもよい. このとき,3 点が一直線上にあるならば, その直線は実軸と並行で a を通る. よって直線の方程式は

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = a$$

より,$z = 1/w$ とおくと,w は

$$\left| w - \frac{1}{2a} \right| = \left| \frac{1}{2a} \right|$$

より, 原点を通る. □

問題 4.

$PQ = p, OP = n, OQ = m$ とおく．このとき,$\angle OQP$ の二等分線と OP との交点を A とおくと,$\angle Q = 2\angle P$ $\triangle OAQ$ と $\triangle OQP$ は相似となる．よって $OA : OQ = OQ : OP$ より,

$$OA : m = m : n \tag{1}$$

よって,

$$OA = \frac{m^2}{n}$$

となる. 角の 2 等分線の性質から $OA : PA = OQ : PQ$ なので, A は線分 OP を $m : p$ に内分するので

$$OA = \frac{m}{m+p}OP = \frac{mn}{m+p}$$

よって, $\dfrac{m^2}{n} = \dfrac{mn}{m+p}$ を整理して

$$m(m+p) = n^2 \qquad \cdots (*)$$

を得る。以下, m が p の倍数である場合とそうでない場合で考える。

Case 1. (m が p の倍数の場合)
自然数 k によって $m = pk$ と表されるとする。このとき, $(*)$ に代入して $k(1+k) = \dfrac{n^2}{p^2}$ となる。よって n は p の倍数でなければならない。$n = pj$ (j は自然数) とすると, $k(1+k) = j^2$ となるが,

$$k^2 < k(1+k) = j^2 < k^2 + 2k + 1$$

であることから $k < j < k+1$ となる。j は自然数だからこのような j を取ることは出来ない。よってこの場合は解なし。

Case 2. (m が p で割れない場合)
$(*)$ の左辺 $m(m+p)$ について, m と $m+p$ は互いに素であり, その積が n^2 という平方数になるので, m と $m+p$ はともに平方数でなければならない。そこで,N_1, N_2 を自然数として $m = N_1^2$, $m+p = N_2^2$ であるとすると,

$$p = N_2^2 - N_1^2 = (N_2 - N_1)(N_2 + N_1)$$

となる。N_1, N_2 は自然数で, p は素数であるから, $N_2 - N_1 = 1$ かつ $N_2 + N_1 = p$ でなければならない。よって $N_1 = \dfrac{p-1}{2}, N_2 = \dfrac{p+1}{2}$ であることが必要である。(また, これが自然数であるためには p が奇素数でなければならない。) よって, まず

$$OQ = m = N_1^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

である。さらに, これを $(*)$ に代入して $OP = n = \dfrac{p^2-1}{4}$ を得る。よって, (OP, PQ, OQ) の候補は, p を奇素数として

$$\left(\frac{p^2-1}{4}, p, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right)$$

であるが, この 3 辺の長さを持つ三角形が存在するのは, 三角不等式から $p \geqq 5$ のときであると分かる。よって, 求める (OP, PQ, OQ) の条件は

$$\boldsymbol{\left(\frac{p^2-1}{4}, p, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\right), (p \geqq 5\ \text{は素数})}$$

ですべてである。

問題 5.

2^m の 1 の位は $1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$ となって 5^n の 1 の位は $1, 5, 5, 5, \ldots$ となっている．よって,$2^m + 5^n \equiv 7 \pmod{10}$ となるためには,

$$(2^m \mod 10, 5^n \mod 10) = (6, 1), (2, 5)$$

となる．$n = 0$ のとき,1 の位が 7 となるものは $16 + 1, 256 + 1, \ldots$ とある．$n \neq 0$ のとき,1 の位が 7 となるものは $2 + 5, 2 + 25, 2 + 125, 32 + 5, 32 + 25, 32 + 125, \ldots$ とある．今挙げたものを小さい順に並べると

$$2^m + 5^n = 7, 17, 27, 37, 57, 127, 157, 257, \ldots$$

となる．これ以外のものは全部 257 より大きいので $2^m + 5^n$ でかける数を小さい順に見たとき,**6 番目に小さいものは 127 である.**

問題 6.

$$f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta + \tan\theta$$

としたとき,

$$f'(\theta) = \cos\theta - \sin\theta + \frac{1}{\cos^2\theta}$$

よって,

$$f'(\theta) \geqq \cos\theta - \sin\theta + 1$$

より,

$$f'(\theta) \geqq \sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4) + 1 > 0 (|\theta| < \pi/2)$$

となるため,$f(\theta)$ は $|\theta| < \pi/2$ で単調増加である．また,

$$\lim_{\theta \to -\pi/2+0} f(\theta) = -\infty, \lim_{\theta \to \pi/2-0} f(\theta) = \infty$$

であるため, 中間値の定理より $f(\theta) = 1$ となる θ がただ一つだけ存在する．実際,$\theta = 0$ は解であるため, これが全ての解であることがわかる。よって, $\boldsymbol{\theta = 0}$

問題 7.

$s = a + b + c$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&2(a+b+c)^3 + (a+b)(b+c)(c+a) + 2abc \\
&= 2s^2(a+b+c) + (s-a)(s-b)(s-c) + 2abc \\
&= 2s^2(a+b+c) + s^3 - (a+b+c)s^2 \\
&\qquad + (ab+bc+ca)s - abc + 2abc \\
&= s^3 + s^2(a+b+c) + s(ab+bc+ca) + abc \\
&= (s+a)(s+b)(s+c) \\
&= \boldsymbol{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}
\end{aligned}$$