

令和元年度 11 月 祭

# 作問サークルオリジナル模試

## 数 学

### (注 意)

1. (高校) 数学の問題作成を主な活動としている当サークルは、今年の 11 月祭でオリジナル数学模試の販売・実施企画を行う。
2. 文系問題, 理系問題のセットをそれぞれ 2 回分用意している. 問題は京大数学を意識しているものであり, すべてサークルのメンバーによる自作問題からなる.
3. 企画開催日は **11 月 21, 22, 23, 24** 日の 4 日間であり, 総合人間学部棟地下 **1B09** にて販売する. 各日の **13:00** より模試を開始する.
4. 教室で受験はせずに本模試の購入のみをすることも可能である. (ただし, 採点サービスは教室受験者限定とする.)
5. 4 日間とも教室受験を受け付けているが, 収容人数がかなり限られているので早めに向かうこと.
6. 受験資格は特に無し. 『覚悟して来てる人』なら 受験生から京大生や教授まで, 誰でも歓迎する.
7. (受験生諸君へ) 本模試は, その成績によって実際の試験の合格または不合格を保証するようなものではない. そのへん「ごっこ遊び」だと思って気楽に受けにきてほしい.
8. Twitter アカウントのフォローもぜひ → @saKUmonCircle
9. このビラの裏に 7 問, メンバーの自作問題を紹介している. よかったら解いてみてほしい. 解答は上の Twitter アカウントで公開する予定である.
10. 模試の他にもメンバーの自作問題からなる部誌を販売しているので是非買っていただきたい.

### 問題 1.

$f(x) = e^x \sin x$  とする. このとき正の実数列  $\{a_n\}$  は,  $f(x)$  の  $x = a$  での接線が原点を通るような  $a$  を小さい順に取っている.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan a_n$  を求めよ.

(2) (1) で求めた極限の値を  $\alpha$  としたとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\tan a_n - \alpha)$  を求めよ.

### 問題 2.

全ての実数で定義された微分可能な関数  $f(x)$  がある.  $f'(x)$  が連続かつ周期関数であるときある定数  $a$  が存在して  $f(x) - ax$  が周期関数になることを示せ. ただし連続関数  $g(x)$  が周期関数であるとはある正の実数  $h$  が存在して  $g(x) = g(x+h)$  が任意の  $x$  で成立することをいう.

### 問題 3.

$f(x)$  を実数係数の 3 次の整式とし, 整式  $g(x)$  を  $g(x) = x^3 f(1/x)$  により定義する.  $f(x) = 0$  は異なる 3 つの複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  を解に持ち,  $g(x) = 0$  の解は複素数平面上で一直線上にあるとする. このとき, 複素数平面において  $\alpha, \beta, \gamma$  を同時に通る円周または直線は原点を通ることを示せ.

### 問題 4.

$\triangle OPQ$  について,  $PQ$  の長さは素数であり  $OP, OQ$  の長さは整数とする.

$\angle P : \angle Q = 1 : 2$  であるとき, 辺の長さの組  $(OP, PQ, OQ)$  をすべて求めよ.

### 問題 5.

整数  $m, n$  を用いて  $2^m + 5^n$  の形で表される十進法で一の位が 7 である整数のうち, 6 番目に小さいものを求めよ.

### 問題 6.

$|\theta| < \pi/2$  を満たす実数  $\theta$  のうち,  $\sin \theta + \cos \theta + \tan \theta = 1$  を満たすものをすべて求めよ.

### 問題 7.

$$2(a+b+c)^3 + (a+b)(b+c)(c+a) + 2abc$$

を因数分解せよ.