Online Welcome Party for Newcomers of KU-sakumon Circle

京大数学作問サークル
オンライン新歓
4/19(月), 4/21(水)

$$1 = 8^a - 9^b \cdot 7^c$$

1　注意

1. **4/19(月)** と **4/21(水)** の 2 日間の 19:00～21:00 の間, Zoom 上にて京大数学作問サークルの説明会およびビラ問題解説を行う。

2. このサークルは, 高校数学や大学数学の作問活動を中心として数学を楽しむサークルである。メンバー間で多くの問題を共有し, オリジナル京大数学模試や部誌を創作している。

3. 今年度は「京大生」を入会対象とする。学部, 回生, 実力などは一切問わない。

4. 気になる人はこのサークルの Twitter アカウント **@saKUmonCircle** もフォローしよう。

5. ゆるく, そして仲良くやっているサークルである。

6. 2,3 ページにある 6 問はメンバーの自作問題である。これらは新歓 Zoom で解説を行うものであり, 19 日には 1,2,3 番を, 21 日には 4,5,6 番の問題を解説する。

2　オンライン新歓・サークルへの参加方法

本年度の作問サークルの新歓は **Zoom で行います**。新歓参加希望者は

1. **Twitter アカウント @saKUmonCircle の DM**
2. **メールアドレス ku.sakumon@gmail.com**

のいずれかに「参加希望です。」などとご連絡いただき, その次にこちらが指定する **KULASIS のページ**のスクリーンショットを送信していただきます。確認次第, Zoom のリンクを共有いたします。 そのリンクからご参加ください。

サークルに参加希望の方は, 新歓の最後にお送りする Google フォームアンケートにメールアドレスを書き込んでいただきます。確認次第, 作問サークル Slack に招待いたしますので, Slack にご参加ください。

$\boxed{1}$

(作問者：びゃっこ)

正の実数 a, b, c が三角形の成立条件 $(|a-b| < c < a+b)$ を満たしながら動くとき,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

の取り得る値の範囲を求めよ.

$\boxed{2}$

(作問者：ふぇにる)

点 O を中心とする半径 1 の円上の点 P_0 から, 直径 AP_0 とのなす角 $\theta > 0$ で円の内部に光線を発射する. このとき次の問いに答えよ.

(1) 光線が $n(\geqq 1)$ 回反射したのちに線分 AP_0 の端点以外の点と交わる点を P_n とするとき, P_n の定義できる n の最大値 N を θ を用いて表せ.

(2) $1 \leqq n \leqq N$ の範囲で $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ を n を用いて表せ.

$\boxed{3}$

(作問者： Lim)

京都大学は 1897 年, 作問サークルは 2018 年に設立された. m, n は正の整数とする.

(1) $2018^n - 1897^m$ が平方数となるような m, n をすべて求めよ.

(2) $2018^n - 1897^m$ は立方数となる m, n は存在するか.

$\boxed{4}$ (作問者：びゃっこ)

四角形 ABCD が外接円を持つならば, 辺の長さについて $\min\{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{DA}\} < \min\{\mathrm{AC}, \mathrm{BD}\}$ であることを示せ.

$\boxed{5}$ (作問者：立松)

数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たしている.

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \log(1 + a_n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき次の問いに答えよ.

(1) $0 < x \leq 1$ を満たす任意の実数 x に対し

$$\frac{2x}{2+x} < \log(1+x) < \frac{6x}{6+3x-2x^2}$$

となることを示せ.

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ.

$\boxed{6}$ (作問者：shakayami)

N を正の整数とする. 整数 a, b, c を $1 \leqq a, b, c \leqq N$ から等確率で独立に選ぶ. このときの $\mathrm{gcd}(a, b, c)$ の期待値を g_N とおく. このとき, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} g_N$ を求めよ. ただし $\mathrm{gcd}(a, b, c)$ は a, b, c の最大公約数である.

問題は, このページで終わりである.

3　ビラ問題解答

4　問 1 解答

$$\frac{a+b-c}{a+b+c}=x, \frac{a-b+c}{a+b+c}=y, \frac{-a+b+c}{a+b+c}=z$$

とすると, x, y, z は全て正であり,

$$x+y+z=1, a=\frac{(x+y)(a+b+c)}{2}, b=\frac{(x+z)(a+b+c)}{2}, c=\frac{(y+z)(a+b+c)}{2}$$

である. 代入して

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}&=\frac{1-z}{1+z}+\frac{1-y}{1+y}+\frac{1-x}{1+x}\\&=\frac{2}{2-x-y}+\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}-3\end{aligned}$$

となる. 正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たしながら動くときのこの式の値の範囲について考える. $y=y_0$ と固定すると $0<x<1-y_0$ である. この範囲について,

$$f(x)=\frac{2}{2-x-y_0}+\frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y_0}-3$$

として, x で微分すると

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{(2-x-y_0)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)$$

となるので $0<x<\frac{1-y_0}{2}$ で $f(x)$ は減少, $\frac{1-y_0}{2}<x<1-y_0$ で $f(x)$ は増加する. よって

$$\frac{8}{3-y_0}+\frac{2}{1+y_0}-3=f\left(\frac{1-y_0}{2}\right)\leq f(x)<f(0)=f(1-y_0)=\frac{2}{2-y_0}+\frac{2}{1+y_0}-1$$

$0<y<1$ において,

$$g(y)=\frac{8}{3-y}+\frac{2}{1+y}-3$$

とおく. y で微分して

$$g'(y)=\frac{8}{(3-y)^2}-\frac{2}{(1+y)^2}$$

同様にして,

$$g(y)\geq g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}$$

と分かる. また,

$$h(y)=\frac{2}{2-y}+\frac{2}{1+y}-1$$

とおくと, 同様にして

$$h(y)<h(0)=h(1)=2$$

よって結局

$$\frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

と分かる. 実際, $a = b = c$ で左の等号が成り立ち, $a \fallingdotseq b, c \fallingdotseq 0$ などで 2 に近づく.

4.1 最小値に関して別解

斉次式なので $a + b + c = 1$ としてよい. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ とすると

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = f(a) + f(b) + f(c)$$

である. ここで, $f(x)$ は $0 < x < 1$ で凸関数なので Jensen の不等式より

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

この不等式は Nesbbit の不等式と呼ばれ, 解法からも明らかなように a, b, c が正であれば三角形の成立条件を満たさなくても成立する.

5 問 2 解答

5.1 (1)

座標平面上で円を $x^2 + y^2 = 1$, 点 P_0 を (1,0) としても一般性は失われない. 光線が n 回目に反射した円周上の点を Q_n とすると, 全ての n について $\angle \mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{O}\mathrm{Q}_n = \pi - 2\theta$ であるから $\mathrm{Q}_n(\cos n(\pi - 2\theta), \sin n(\pi - 2\theta))$ と表せて,P_n ができる n の最大値が N であるというのは点 P_{N+1} が線分 AP_0 の端点以外の点と交わらないということであり, 点 $\mathrm{Q}_{N+1}, \mathrm{Q}_{N+2}$ の y 座標が同符号であることと同値である.

$$\begin{aligned}\sin n(\pi - 2\theta) &= \sin n\pi \cos 2n\theta - \cos n\pi \sin 2n\theta \\ &= (-1)^{n+1} \sin 2n\theta\end{aligned}$$

より Q_n の y 座標を y_n とすると

$$\begin{aligned}y_{N+1} &= (-1)^{N+2} \sin 2(N+1)\theta \\ y_{N+2} &= -(-1)^{N+2} \sin 2(N+2)\theta\end{aligned}$$

であるから $\sin 2(N+1)\theta, \sin 2(N+2)\theta$ は異符号である. また,$\sin 2\theta, \sin 4\theta, \cdots, \sin 2(N+1)\theta$ は全て同符号であるから

$$2(N+1)\theta < \pi \leqq 2(N+2)\theta$$

であり,N について解くと

$$\frac{\pi}{2\theta} - 2 \leqq N < \frac{\pi}{2\theta} - 1$$

以上より求める値は

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{2\theta} \right\rceil - 2$$

5.2 (2)

$\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{Q}_1 = \angle \mathrm{OQ}_1\mathrm{P}_0 = \theta, \angle \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1 = 2\theta$ であるから, $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 = \mathrm{OP}_0 + \mathrm{OP}_1$. また $\angle \mathrm{OQ}_{k+1}\mathrm{P}_k = \theta, \angle \mathrm{P}_k\mathrm{Q}_{k+1}\mathrm{P}_{k+1} = 2\theta$ であるから, $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1} = \mathrm{OP}_k + \mathrm{OP}_{k+1}$. よって全ての点 P_n について $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n = \mathrm{OP}_{n-1} + \mathrm{OP}_n$ が成り立つ. まず $\mathrm{OP}_0 = 1$ で $\angle \mathrm{OQ}_1\mathrm{P}_1 = \theta, \angle \mathrm{P}_1\mathrm{OQ}_1 = 2\theta$ より $\angle \mathrm{OP}_1\mathrm{Q}_1 = \pi - 3\theta$. $\angle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n = \theta_n$ とすると $\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{OQ}_{n+1} = \pi - \theta_n + \theta, \angle \mathrm{OQ}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1} = \theta$ だから θ_{n+1} と θ_n の関係は

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} + \theta + (\pi - \theta_n + \theta) &= \pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n - 2\theta\end{aligned}$$

この漸化式を解くと

$$\begin{aligned}\theta_n &= \theta_1 + (n-1)(-2\theta) \\ &= (\pi - 3\theta) - 2(n-1)\theta \\ &= \pi - (2n+1)\theta\end{aligned}$$

$\triangle \mathrm{OP_nQ_n}$ について正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(\pi - (2n+1)\theta)} &= \frac{\mathrm{OP}_n}{\sin\theta} \\ \mathrm{OP}_n &= \frac{\sin\theta}{\sin(2n+1)\theta}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0} \mathrm{OP}_n &= \lim_{\theta\to+0} \frac{\sin\theta}{\sin(2n+1)\theta} \\ &= \lim_{\theta\to+0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{(2n+1)\theta}{\sin(2n+1)\theta} \cdot \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

また $\mathrm{OP}_0 = 1$ より, 求める極限値は

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to+0} \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n &= \lim_{\theta\to+0} (\mathrm{OP}_{n-1} + \mathrm{OP}_n) \\ &= \lim_{\theta\to+0} \mathrm{OP}_{n-1} + \lim_{\theta\to+0} \mathrm{OP}_n \\ &= \frac{1}{2(n-1)+1} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{4n}{4n^2-1}\end{aligned}$$

5.3 コメント

本問の (2) は一見, N が θ に依存しているため, 奇妙かもしれない. (1) の答えより N は $\theta \to +0$ で増大するものになっているので, 自然数 n をひとつ固定したとき, 十分小さい $\theta > +0$ では常に $n < N$ になることが従う. $\theta \to 0$ を「$n < N$ となる θ の範囲で 0 に近づける」と言ったほうが親切だったかもしれない.

6　問 3 解答

6.1　(1)

$n=1$ のとき, $2018-1897=121=11^2$ なのでよい。
$n \geq 2$ とする。このとき, 2018^n は 4 の倍数であり, $1897 \equiv 1 \pmod 4$ なので

$$2018^n - 1897^m \equiv -1 \pmod 4$$

となる。これは平方剰余ではないから, 平方数にはならない。よって $n=1$ のみ。

6.2　(2)

$1897 = 7 \times 271$ である。$2018^n - 1897^m = N^3$ であるとしよう。 mod 7 を取ると, $2018 \equiv 2 \pmod 7$ だから

$$N^3 \equiv 2^n \pmod 7$$

である。ここで, $N^3 \bmod 7 = \pm 1, 0$ と, $2^n \bmod 7 = 2, 4, 1$ により, 上の両辺は 1 mod 7 で等しくなければばならない。よって $2^n \equiv 1 \pmod 7$ なので n は 3 の倍数である。$n=3a$ とおくと,

$$2018^{3a} - N^3 = 1897^m$$

である。左辺は $(2018^a - N)(2018^{2a} + 2018^a N + N^2)$ である。ここで, 仮に p が二つの因数を割りきる素数であるとすると, p は 1897 の素因数でもあるので, $p \in \{7, 271\}$ である。一方で,

$$2018^a \equiv N, \quad 2018^{2a} + 2018^a N + N^2 \equiv 0 \pmod p$$

であるため, $3N^2 \equiv 0 \pmod 0$ が得られる。3 は p の倍数ではないので,N が p で割れることになり, $2018^a \equiv 0 \pmod p$ なので, p で割れることになる。これは $p \in \{2, 1009\}$ ということになり, 矛盾である。よって, 二つの因数は共通の素因数を持たないため互いに素である。よって, $0 < 2018^m - N < 2018^{2a} + 2018^a N + N^2$ に注意すると次の二つのパターンが考えられる:

Type I: $2018^a - N = 7^m, \qquad 2018^{2a} + 2018^a N + N^2 = 271^m$

Type II: $2018^a - N = 1, \qquad 2018^{2a} + 2018^a N + N^2 = 1897^m$

Type I

$N = 2018^a - 7^m$ を代入することで

$$\begin{aligned} &2018^{2a} + 2018^a(2018^a - 7^m) + (2018^a - 7^m)^2 \\ &= 3 \cdot 2018^{2a} - 3 \cdot 2018^a \cdot 7^m + 7^{2m} = 271^m \end{aligned}$$

整理すると,

$$3 \cdot 2018^a (2018^a - 7^m) = 271^m - 49^m \tag{1}$$

mod7 を取ると

$$3 \cdot (2018^a)^2 \equiv 5^m \pmod 7$$

であり, 3 は mod7 で平方非剰余なので左辺は平方非剰余である。よって 5^m も平方非剰余であるから, 特に m は偶数になってはならない。よって m は奇数である[*1]。そして m が奇数であることから

$$271^m - 49^m \equiv (-1)^m - 1^m \equiv 2 \pmod 4$$

であり, $271^m - 49^m$ は 4 で割り切れない偶数である。

(1) の左辺が 4 で割り切れないためには $a = 1$ でなければならない。これを代入して整理すれば

$$3 \cdot 2018^2 = 271^m + 6054 \cdot 7^m - 49^m$$

を得る。これの自然数解 m が存在しないことは簡単に確かめられる。たとえば, 最も短く済む方法は以下の通りである:

以下, mod5 で考える。m が奇数であったことに注意。よって, $2018^2 \equiv -1$, $49^m \equiv -1$, $6054 \equiv -1$ なので,

$$-3 \equiv 1 + (-1) \cdot 7^m - (-1)$$

これを整理すると $7^m \equiv 0$ となるので解はない。

Type II

N を消去すると

$$3 \cdot 2018^a(2018^a - 1) = 1897^m - 1$$

を得る. 左辺は 2 で a 回割れる。一方で奇数 r, 非負整数 t を用いて $m = 2^t r$ と書くと,

$$1897^m - 1 = (1897^r - 1)\prod_{j=0}^{t-1}(1897^{2^j r} + 1)$$

である (ただし $t = 0$ なら積の部分は 1 とする)。r が奇数なので, $1897^r - 1$ は

$$1897^r - 1 \equiv 9^r - 1 \equiv 8 \pmod{16} \quad (\because 1897 = 1600 + 160 + 128 + 9)$$

より 2 で 3 回しか割れない。$1897 \equiv 1 \pmod 4$ だから $1897^{2^j r} + 1$ $(0 \le j \le t-1)$ は 4 で割れない偶数であり, $1897^m - 1$ は $t + 3$ 回だけ 2 で割れることが分かる。よって, $a = t + 3$ であり, $a \ge 3$ である。よって,

$$\boldsymbol{3 \cdot 2018^a(2018^a - 1) = 1897^{2^{a-3}r} - 1, \quad a \ge 3, \quad r :} \textbf{奇数} \tag{2}$$

の解を調べるとよい。少々の**腕力**により, $a = 3, 4, 5, 6$ の可能性は否定できる:

[*1] 5 は平方非剰余なので 5^m は平方非剰余である。よって, この両辺を比較することはこれ以上はできない。

1. $a=5,6$ のとき, 右辺の指数の $2^{a-3}r$ は 4 の倍数なので, $4b$ と書ける。$1897^{4b}-1$ は 5 の倍数であるが, 2018^a-1 は $a=5,6$ で 5 の倍数ではなく, 左辺は 5 の倍数ではないから不適。
2. $a=4$ のとき, 2018^4-1 は 5 の倍数だが, () の右辺の mod5 は $2^{2r}-1$ であり, r が奇数だから これは 0 と合同ではない。よって不適。
3. $a=3,6$ のとき, 2018^a-1 は 7 の倍数であることが容易に分かる ($2018 \equiv 2 \pmod 7$)。しかし, 右辺は 7 の倍数から 1 を引いたものだから 7 の倍数ではない。

以降 $a \geq 7$ とする。(2) の式を次のように評価する。

$$(\text{左辺}) \leq 3 \cdot 2018^{2a}-1 < 6^a \left(\frac{1897}{2018}\right)^{2a} 2018^{2a}-1 = 6^a \cdot 1897^{2a}-1 < 1897^{\frac{9}{4}a}-1$$

$$(\text{右辺}) \geq 1897^{2^{a-3}}-1$$

よって,

$$1897^{2^{a-3}}-1 < 1897^{\frac{9}{4}a}-1$$

だから $2^{a-3} < \frac{9}{4}a$ が成り立たなければならない。しかしこれが $a \geq 7$ で成り立たないことは容易である。(たとえば, $a=7$ では不等式は $16 < \frac{63}{4}$ となりおかしい。)

以上より**立方数にはならない。**

6.3 補足

正直, (2) はかなり面倒な問題であるが, それでも私はこの解き方が典型から外れたものであるとは思わない.

一般的に $x^m - y^m$ の形の式を見たら, 何かの素数で割り切れる回数を求めるのはかなり典型的な方針である (典型的とは言っても, 数オリレベルの話である). というのも, 次のような **LTE の補題**が知られているからだ.

LTE の補題 (Lifting The Exponent lemma)

x,y を異なる整数, n を自然数, p を素数で $x-y$ が p で割り切れ, x,y が p で割れないとする. 0 でない整数 N に対して, N の素因数分解に現れる p の指数を $v_p(N)$ と書くとき, 次が成立する.

1. p が奇素数の場合,
$$v_p(x^n-y^n) = v_p(x-y)+v_p(n)$$
2. $p=2$ のとき, もし $4|x-y$ であるなら
$$v_2(x^n-y^n) = v_2(x-y)+v_2(n)$$
もし $4 \not| x-y$ であるなら
$$v_2(x^n-y^n) = v_2(x-y)+v_2(x+y)+v_2(n)-1$$

今回の解答は「LTE の補題より」という文言こそ使わなかったものの, アイデアとしては実質 LTE の補題をもとにしている.

LTE の補題を使ったあと, $x^m - y^m$ の指数 m に関する「非常に強い制約」が生まれることが多い. たとえば今回の解答の場合分けの 2 つめにおいては, $m = 2^t r$ と置いて割り切れる回数を評価すると $t = a - 3$ という式が得られた. ここから $m \geq 2^{t-3}$ という簡易的な評価ができるので, m が t の指数関数で下から抑えられる. このような状況は非常によく起こることであり, ここまで来ればおおざっぱな評価で必要条件が大きく絞れることも多い (ただし今回の問題は $a = 3, 4, 5, 6$ など, かなり絞りづらい問題だった).

6.4 別解 (by すむーずぷりん)

次を満たす自然数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ:

$$\alpha^x - \beta^y = z^3, \quad \alpha = 2018, \quad \beta = 1897 \tag{$*$}$$

解答

存在すると仮定して矛盾を導く. $\bmod 7$ を考えると $\alpha \equiv 2$, $\beta \equiv 0$ なので, $(*)$ より

$$2^x \equiv z^3$$

が得られる. 2^x が $\bmod 7$ で立方剰余となるのは x が 3 の倍数のときのみである. そこで $x = 3\xi$ とおく. $(*)$ に代入して整理すると

$$\beta^y = \alpha^{3\xi} - z^3 = (\alpha^\xi - z)(\alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2)$$

となる. ここで $\alpha^\xi - z$ と $\alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2$ は互いに素である. 実際, もし互いに素でないならばある共通素因数 p を持つので

$$\alpha^\xi - z = kp, \quad \alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2 = \ell p$$

となる自然数 k, ℓ が取れる. ふたつの式から z を消去して整理すると

$$3\alpha^{2\xi} = (3k\alpha^\xi - k^2 p + \ell)p$$

となり, 一方で $(*)$ から

$$\beta^y = k\ell p^2$$

となる. よって p は 3α と β の公約数だが, 3α と β は互いに素なので矛盾である. $\alpha^\xi - z$ と $\alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2$ は互いに素であることから, 次の二通りを考えれば十分である：

CaseA $\alpha^\xi - z = 1, \quad \alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2 = \beta^y$
CaseB $\alpha^\xi - z = 7^y, \quad \alpha^{2\xi} + \alpha^\xi z + z^2 = 271^y$

いずれの場合でも y が 504 の倍数であることを示す.

CaseA $z = \alpha^\xi + 1$ を $(*)$ に代入して整理すると

$$\alpha^{3\xi} - \beta^y = (\alpha^\xi - 1)^3 \iff 3\alpha^\xi(\alpha^\xi - 1) = \beta^y - 1$$

が得られる．mod 1009 を考えると $\alpha \equiv 0$ であることから

$$\beta^y \equiv 1$$

となる．これを満たすのは y が 504 の倍数のときのみである．

CaseB $z = \alpha^\xi + 7^y$ を $(*)$ に代入して整理すると

$$\alpha^{3\xi} - \beta^y = (\alpha^\xi - 7^y)^3 \iff 3\alpha^\xi(\alpha^\xi - 7^y) = 271^y - 49^y$$

が得られる．mod 1009 を考えると $\alpha \equiv 0$ であることから

$$271^y \equiv 49^y \iff 335^y \equiv 1$$

となる．これを満たすのは y が 504 の倍数のときのみである．

$y = 504\eta$ とおく．$(*)$ より

$$\alpha^{3\xi} - \beta^{504\eta} = z^3 \iff (\beta^{168\eta})^3 + z^3 = (\alpha^\xi)^3$$

となる．ところが Fermat の最終定理よりこの等式は成立しない．

6.5 コメント

本問は私の初代ビラ問題のリスペクトである．

初代ビラ問題

京都大学は 1897 年に創立された．自然数 a, b, c の組であって，

$$1 = 8^a - 9^b \cdot 7^c$$

を満たすようなものをすべて求めよ．

こちらは今回の問題よりは易しめなので，ぜひ解いてもらいたい．作サー初期メンバーは全員，私のこの問題に釘付けにされたため，3 年という節目を迎えて生まれたこのビラ問題に涙を流さなかった初期メンバーはいないらしい．

7 問 4 解答

AB,AC,AD の長さの関係について考える．$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ とすると $\angle\mathrm{ADC} = \pi - \theta$ である．余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}}, \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AC}^2}{2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{AD}}$$

なので

$$\frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AC}^2}{2 \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC}} + \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AC}^2}{2 \cdot \mathrm{CD} \cdot \mathrm{AD}} = 0$$

$\mathrm{BC} = x$ として

$$\frac{\mathrm{AB}^2 + x^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}x} + \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2 - \mathrm{AC}^2}{2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AD}} = 0$$

これが $x>0$ の範囲に解を持つような AB,AC,AD の条件を求めたい. 整理すると

$$f(x)=\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}x^2+\mathrm{AB}(\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2)x+(\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2)\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}=0$$

$f(x)$ は x の二次関数で, x^2 の係数は正である. $\mathrm{AB}\geq\mathrm{AC}$ とすると, $f(0)\geq 0$ なので, $f(x)=0$ が正の実数解を持つにはその 2 解の和が正である必要がある. よって

$$-\frac{\mathrm{AB}(\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2-\mathrm{AC}^2)}{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}}>0$$

より $\mathrm{AD}^2<\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2<\mathrm{AC}^2$ なので $\mathrm{AD}<\mathrm{AC}$ となる. つまり, $f(x)=0$ が正の実数解を持つ, つまり四角形 ABCD が外接円を持つならば, $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}$ または $\mathrm{AD}<\mathrm{AC}$, すなわち $\min\{\mathrm{AB},\mathrm{AD}\}<\mathrm{AC}$ であることが分かる. 同様にして,

$$\min\{\mathrm{BC},\mathrm{CD}\}<\mathrm{AC},\quad \min\{\mathrm{AB},\mathrm{BC}\}<\mathrm{BD},\quad \min\{\mathrm{CD},\mathrm{DA}\}<\mathrm{BD}$$

なので

$$\min\{\mathrm{AB},\mathrm{BC},\mathrm{CD},\mathrm{DA}\}<\min\{\mathrm{AC},\mathrm{BD}\}$$

となる.

7.1 別解 1

$\min\{\mathrm{AB},\mathrm{BC},\mathrm{CD},\mathrm{DA}\}=\mathrm{AB},\min\{\mathrm{AC},\mathrm{BD}\}=\mathrm{AC}$ としてよい. このとき, 当然 $\mathrm{AB}\leq\mathrm{DA}$ である. トレミーの定理より

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DA}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

AB で割って

$$\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{BD}$$

ここで $\mathrm{AB}\geq\mathrm{AC}$ と仮定すると

$$\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\leq\mathrm{CD}+\mathrm{BD}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{BD}\leq\mathrm{BD}$$

となり, $\triangle\mathrm{BCD}$ が存在しないことになり, 矛盾. よって $\mathrm{AB}<\mathrm{AC}$ が示せた.

7.2 別解 2

$\angle\mathrm{ACD}=\alpha,\angle\mathrm{BDC}=\beta,\angle\mathrm{CAD}=\gamma,\angle\mathrm{DBA}=\delta$ とする. このとき, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ である. 四角形 ABCD の外接円の半径を R とすると正弦定理より

$$\mathrm{AB}=2R\sin\alpha,\quad \mathrm{BC}=2R\sin\beta,\quad \mathrm{CD}=2R\sin\gamma,\quad \mathrm{DA}=2R\sin\delta,$$

$$\mathrm{AC}=2R\sin(\gamma+\delta)\,,\quad \mathrm{BD}=2R\sin(\beta+\gamma)$$

ここで, $\min\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}=\alpha$ としてよい. $\sin\alpha\geq\sin\beta$ ならば, $\alpha\leq\beta$ なので

$$\pi-\alpha\leq\beta$$

となるが, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ に矛盾する．よって $\sin\alpha<\sin\beta$ となる．$\sin\gamma, \sin\delta$ についても同様である．ゆえに $\min\{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{DA}\}=2R\sin\alpha$ となる．
また, $\sin\alpha \geq \sin(\gamma+\delta), \sin\alpha \geq \sin(\beta+\gamma)$ と仮定しても同様に矛盾するので $\sin\alpha < \sin(\gamma+\delta), \sin\alpha<\sin(\beta+\gamma)$．よって

$$\sin\alpha<\min\{\sin(\gamma+\delta), \sin(\beta+\gamma)\}$$

なので $2R$ をかけて

$$\min\{\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CD}, \mathrm{DA}\}<\min\{\mathrm{AC}, \mathrm{BD}\}$$

8 問 5 解答

8.1 (1)

$f(x)=\log(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}\ (0<x\leq 1)$ とする．このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x)-2x}{(2+x)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+4-4(1+x)}{(1+x)(2+x)^2} \\ &= \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0 \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は単調増加. 以上から $f(x)>f(0)=0$. つまり

$$\log(1+x)>\frac{2x}{2+x}$$

一方, $g(x)=\dfrac{6x}{6+3x-2x^2}-\log(1+x)\ (0<x\leq 1)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{6(6+3x-2x^2)-6x(3-4x)}{(6+3x-2x^2)^2}-\frac{1}{1+x} \\ &= \frac{(36+12x^2)(1+x)-(6+3x-2x^2)^2}{(6+3x-2x^2)^2(1+x)} \\ &= \frac{x^2(27+24x-4x^2)}{(6+3x-2x^2)^2(1+x)} \end{aligned}$$

ここで $0<x\leq 1$ より

$$27+24x-4x^2=27+4x(6-x)>0$$

となるので $g'(x)>0$. よって $g(x)$ は単調増加. 以上から $g(x)>g(0)=0$ つまり

$$\frac{6x}{6+3x-2x^2}>\log(1+x)$$

となるので, 題意は示された.

8.2　(2)

$x>0$ のとき $\log(1+x)<x$ となることを用いると帰納的に $0<a_{n+1}<a_n\le 1$ となることが従う．よって (1) より

$$\frac{2a_n}{2+a_n}<a_{n+1}<\frac{6a_n}{6+3a_n-2{a_n}^2}$$

となる．任意の自然数 n に対して $a_n>0$ となるので両辺逆数を取ると

$$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}-\frac{a_n}{3}<\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$$

となる．以上から 2 以上の整数 n に対して

$$\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{2}-\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{3}<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{2}$$

$a_1=1$ であるので

$$\frac{n+1}{2}-\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{3}<\frac{1}{a_n}<\frac{n+1}{2}$$

となる．ここで $a_n\le 1$ となるので

$$\frac{1}{a_n}\ge\frac{n+1}{2}-\frac{n-1}{3}=\frac{n+5}{6}$$

つまり $a_n\le\dfrac{6}{n+5}$ となる．これは $n=1$ のときも成立．$y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ が単調減少であることを用いると

$$\begin{aligned}0<\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}&\le\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k+5}\\&<\frac{6}{n}\int_5^{n+5}\frac{1}{x}\,dx\\&=\frac{6\log(n+5)-6\log 5}{n}\\&\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

よって挟み撃ちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=0$$

となる．これを用いると

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{3n}<\frac{1}{na_n}<\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

において最左辺と最右辺がともに $n\to\infty$ で $\dfrac{1}{2}$ に近づくので, 挟み撃ちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}=\frac{1}{2}$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty}na_n=2$$

8.3 別解 (大学数学)

(2) の冒頭で示した通り, $0 < a_{n+1} < a_n \leq 1$ となるので, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加で下に有界であり, 収束する. その極限値を α とし,

$$a_{n+1} = \log(1 + a_n)\ (n = 1, 2, \cdots)$$

において $n \to \infty$ とすると

$$\alpha = \log(1 + \alpha)$$

となる. これより $\alpha = 0$ を得る. すなわち $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ となる. また $a_n > 0$ であるので

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\log(1 + a_n)}$$

となる. これを変形すると

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\log(1 + a_n)} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \log(1 + a_n)}{a_n \log(1 + a_n)}$$

ここで $a_n \to 0\ (n \to \infty)$ であるので, 最右辺は

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \log(1 + x)}{x \log(1 + x)} = \frac{1}{2}$$

に収束する. ただし, ロピタルの定理を用いた. 以上から

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{2}$$

ここで, チェザロ平均の性質から

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) = \frac{1}{2}$$

となる. 左辺を整理すると

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n a_n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}$$

つまり

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(\frac{1}{n a_n} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{n} \right\}^{-1} = 2$$

9 問 6 解答

$\gcd(a, b, c) = k$ となる確率を求める. ただし, $1 \leq k \leq N$ とする. a, b, c が共に k の倍数である確率は $\frac{1}{N^3} \lfloor \frac{N}{k} \rfloor^3$ である. ただしこの場合では $\gcd(a, b, c) = 2k, 3k, 4k, \ldots$ となる場合を排除できていない. ここで, $\gcd(a, b, c) = k$ となる確率は以下のように表記することができる. ここで, $\mu(n)$ はメビウス関数である.

$$P(\gcd(a,b,c)=k) = \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(i)\lfloor\frac{N}{ki}\rfloor^3$$

これは近似的には

$$\begin{aligned}
P(\gcd(a,b,c)=k) &= \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{k}\rfloor}\mu(i)\lfloor\frac{N}{ki}\rfloor^3 \\
&= \frac{1}{N^3}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{k}\rfloor}\left(\mu(i)\left(\frac{N}{ki}\right)^3 + O\left(\frac{N^2}{k^2i^2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{N^3}\cdot\frac{N^3}{k^3}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{k}\rfloor}\mu(i)\left(\frac{1}{i}\right)^3\right) + O\left(\frac{1}{k^2N}\right) \\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{N}{k}\rfloor}\frac{\mu(i)}{i^3} + O\left(\frac{1}{k^2N}\right) \\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^3} + O\left(\frac{1}{k^3}\cdot\frac{k^2}{N^2}\right) + O\left(\frac{1}{k^2N}\right) \\
&= \frac{1}{k^3}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^3} + O\left(\frac{1}{k^2N}\right)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^3} &= \prod_{p:prime}\left(1-\frac{1}{p^3}\right) \\
&= \left(\prod_{p:prime}\frac{p^3}{p^3-1}\right)^{-1} \\
&= \zeta(3)^{-1}
\end{aligned}$$

となる．よって, N が十分大きいとき,

$$P(\gcd(a,b,c)=k) = \frac{1}{k^3}\cdot\frac{1}{\zeta(3)} + O\left(\frac{1}{k^2N}\right)$$

となる．よって最終的な期待値は

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} P(\gcd(a,b,c)=k)\cdot k$$

より,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} g_N &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} k \cdot \left(\frac{1}{k^3\zeta(3)} + O\left(\frac{1}{k^2 N}\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\zeta(3)} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right) \\
&= \frac{1}{\zeta(3)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}
\end{aligned}$$

となる.

10　あとがき

1. 新歓お疲れ様です. 皆様頑張ってくれました.
2. ビラの中にもっと活動内容を含めるべきだったと思った.
3. (言い忘れたこと) 作サーには大学への数学の「学力コンテスト」の問題として採用された人も数名います. 採用されると自分の問題に『価値』がつきます.
4. 今回 18 人くらい来るそうです. すごい!
5. 回生アカウントが暴走してて良い眺めですね.
6. 去年はずっとオンラインでした. 2 回生と顔合わせたのもかなり最近です. 公認サークルではないので, 活動場所が基本的に中々無いという未解決問題を抱えています. (ハイブリッド化しそう)
7. (数学科の人の割合に関する質問を受けて) 数学科志望・数学科は半分くらいの割合を占めています. 上回生には結構多いですが, 2 回生は結構バラバラだったと思います. 別の系, 他学部の方もそれなりに見つかりますし, 何より全員数学が好きで, 人によって好みも得意分野も違います. だから怖い印象を持たないでくれ!
8. (兼サーしてる人の割合に関する質問を受けて) 自分が把握してる限りは 3 4 割くらいだったかと思います. 兼サー自体はいくらでもしてもらって構いません.