

令和 2 年 度

数 学 作 問 サ ー ク ル

新 歓

(注 意)

1. 5/25(月) と 5/27(水) の 2 日間の 18:30~から,Zoom 上にて京大数学作問サークルの新歓および説明会を行う。
2. このサークルは, 高校数学や大学数学の作問活動を中心として数学を楽しむサークルである。2018,2019 年の 11 月祭において, オリジナル京大数学模試を販売したサークルである。
3. 通例, 「京都大学へのアクセスが可能な大学生以上の者」であったが, 今回は「京大生」を入会対象とする。学部, 回生, 実力などは一切問わない。
4. このサークルの Twitter アカウント @saKUmonCircle もよろしくである。
5. ゆるく, そして仲良くやっているサークルである。
6. このファイルの最後にある 6 問はメンバーの自作問題である。これらは新歓で解説を行うものとする。25 日には奇数番を, 27 日には偶数番の問題を解説する。

オンライン新歓の参加方法

本年度の作問サークルの新歓は zoom で行います。参加希望者は Twitter アカウント @saKUmonCircle の DM に「参加希望です。」などご連絡いただき、その次に **KULASIS** のあるページ (こちらがランダムに指定するもの) のスクリーンショットを送信してもらいます (京大生であることを確認するためのプロセスです)。確認次第, Google Document の「zoom 用」というファイルのリンクを共有します。新歓当日, そのファイルに zoom のリンクを書き込みますので, そのリンクから参加ください。

新歓ではビラ問題の解説や, サークルの説明を行います。

問題 1. p, q を素数としたとき,

$${}_{pq}C_p \equiv q \pmod{p}$$

であることを示せ.

問題 2. 自然数 n に対して, $d(n), \sigma(n)$ でそれぞれ n の正の約数の個数, 総和を表すとする. 次の極限值を計算せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(d(1) + d(2) + \cdots + d(n))}{\log(\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n))}$$

問題 3. 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) のグラフを C とする. このとき次の問いに答えよ.

- (1) a, b を正の定数とする. 直線 $y = -ax + b$ と C との共有点の数は最大で三つであることを示し, 共有点が三つであるとき, 傾きが $-a$ である C の接線 $y = g(x)$ であって $g(0) < b$ となるものが存在することを示せ.
- (2) C 上の点であって $x > e$ にある二点 A, B を結ぶ直線と x 軸, y 軸で囲まれる三角形の面積の最小値を求めよ. ただし, 二点 A, B が一致するとき直線 AB は C における点 A での接線を表すものとする.

問題 4. 2つ以上の正四面体により, 隙間なく敷き詰めることができる四面体は存在しないことを示せ.

問題 5. n を 2 以上の整数, p を素数とする. $\frac{p^n + 1}{p + 1}$ は n^2 の整数倍とはならないことを示せ.

問題 6. 任意の自然数 m に対し, 次の 4 つの条件をみたす有限数列 $\{a_n\}$ が存在することを証明せよ. ただし l は $\{a_n\}$ の項数を表す.

- (1) a_1, a_2, \dots, a_l はすべて自然数である.
- (2) $l \geq 2$ のとき, $a_n < a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots, l - 1$)
- (3) ある項 a_n ($1 \leq n \leq l$) が存在し, $a_n = m$ をみたす.
- (4) $\sum_{n=1}^l \frac{1}{a_n} = 1$.