

令和 2 年 度

# 数 学 作 問 サ ー ク ル

## 新 歓

(注 意)

1. 5/25(月) と 5/27(水) の 2 日間の 18:30~から,Zoom 上にて京大数学作問サークルの新歓および説明会を行う。
2. このサークルは, 高校数学や大学数学の作問活動を中心として数学を楽しむサークルである。2018,2019 年の 11 月祭において, オリジナル京大数学模試を販売したサークルである。
3. 通例, 「京都大学へのアクセスが可能な大学生以上の者」であったが, 今回は「京大生」を入会対象とする。学部, 回生, 実力などは一切問わない。
4. このサークルの Twitter アカウント @saKUmonCircle もよろしくである。
5. ゆるく, そして仲良くやっているサークルである。
6. このファイルの最後にある 6 問はメンバーの自作問題である。これらは新歓で解説を行うものとする。25 日には奇数番を, 27 日には偶数番の問題を解説する。

## オンライン新歓の参加方法

本年度の作問サークルの新歓は zoom で行います。参加希望者は Twitter アカウント @saKUmonCircle の DM に「参加希望です。」などご連絡いただき、その次に **KULASIS** のあるページ (こちらがランダムに指定するもの) のスクリーンショットを送信してもらいます (京大生であることを確認するためのプロセスです)。確認次第, Google Document の「zoom 用」というファイルのリンクを共有します。新歓当日, そのファイルに zoom のリンクを書き込みますので, そのリンクから参加ください。

新歓ではビラ問題の解説や, サークルの説明を行います。

問題 1.  $p, q$  を素数としたとき,

$${}_{pq}C_p \equiv q \pmod{p}$$

であることを示せ.

問題 2. 自然数  $n$  に対して,  $d(n), \sigma(n)$  でそれぞれ  $n$  の正の約数の個数, 総和を表すとする. 次の極限值を計算せよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(d(1) + d(2) + \cdots + d(n))}{\log(\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n))}$$

問題 3. 関数  $f(x) = \frac{\log x}{x}$  ( $x > 0$ ) のグラフを  $C$  とする. このとき次の問いに答えよ.

- (1)  $a, b$  を正の定数とする. 直線  $y = -ax + b$  と  $C$  との共有点の数は最大で三つであることを示し, 共有点が三つであるとき, 傾きが  $-a$  である  $C$  の接線  $y = g(x)$  であって  $g(0) < b$  となるものが存在することを示せ.
- (2)  $C$  上の点であって  $x > e$  にある二点  $A, B$  を結ぶ直線と  $x$  軸,  $y$  軸で囲まれる三角形の面積の最小値を求めよ. ただし, 二点  $A, B$  が一致するとき直線  $AB$  は  $C$  における点  $A$  での接線を表すものとする.

問題 4. 2つ以上の正四面体により, 隙間なく敷き詰めることができる四面体は存在しないことを示せ.

問題 5.  $n$  を 2 以上の整数,  $p$  を素数とする.  $\frac{p^n + 1}{p + 1}$  は  $n^2$  の整数倍とはならないことを示せ.

問題 6. 任意の自然数  $m$  に対し, 次の 4 つの条件をみたす有限数列  $\{a_n\}$  が存在することを証明せよ. ただし  $l$  は  $\{a_n\}$  の項数を表す.

- (1)  $a_1, a_2, \dots, a_l$  はすべて自然数である.
- (2)  $l \geq 2$  のとき,  $a_n < a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots, l - 1$ )
- (3) ある項  $a_n$  ( $1 \leq n \leq l$ ) が存在し,  $a_n = m$  をみたす.
- (4)  $\sum_{n=1}^l \frac{1}{a_n} = 1$ .